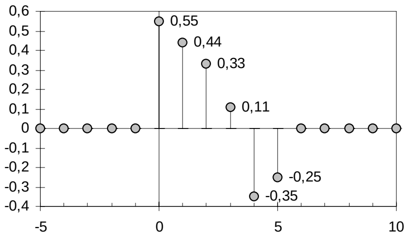
EXERCICES SUR LA TRANSFORMEE EN Z

Exercice 1



Donner la transformée en z de la fonction numérique discrète $x(n)$ représentée par le graphique ci-contre (elle est aussi nulle dans les parties non représentées).

$$X(z) = 0{,}55 + 0{,}44\, z^{-1} + 0{,}33\, z^{-2} + 0{,}11\, z^{-3} - 0{,}35\, z^{-4} - 0{,}25\, z^{-5}$$

Exercice 2

Calculer la transformée en z de la fonction causale suivante et calculer ses zéros et/ou ses pôles.

n	0	1	2	3	4	$5...\infty$
$x(n)$	1	4	6	4	1	0...0

$$X(z)=1 + 4z^{-1} + 6z^{-2} + 4z^{-3} + z^{-4} = z^{-4}\left(z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z^1 + 1\right)$$

$$X(z)=z^{-4}(z+1)\left(z^3+3z^2+3z+1\right) = z^{-4}(z+1)(z+1)\left(z^2+2z+1\right) = z^{-4}(z+1)^4 = \left(1+z^{-1}\right)^4$$

Zéros z=-1 quadruple, bien entendu pas de pôle.

Même question pour la fonction causale suivante.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$8...\infty$
$y(n)$	0	0	0	1	4	6	4	1	0...0

$$Y(z)=z^{-3}\left(1+z^{-1}\right)^4$$

Exercice 3

Calculer la transformée en z des fonctions discrètes suivantes. Vérifier que les théorèmes de la valeur initiale et finale s'appliquent.

$x(n) = 0{,}8^n\, u(n)$ et $y(n) = n\, 0{,}8^n\, u(n)$.

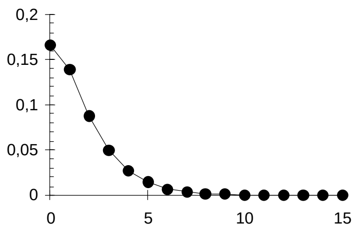
$$X(z) = \frac{z}{z-0.8}$$ et $$Y(z) = -z\,\frac{d\left(\frac{z}{z-0.8}\right)}{dz} = -z\,\frac{-0{,}8}{(z-0{,}8)^2} = \frac{0{,}8z}{(z-0{,}8)^2}$$

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} \left| \frac{z}{z-0.8} \right. = 1 \qquad x(0) = \lim_{z\to\infty} \left| \frac{0{,}8z}{(z-0{,}8)^2} \right. = 0$$

$$x(\infty) = \lim_{z\to 1} \left| \frac{z(z-1)}{z-0.8} \right. = 0 \qquad x(\infty) = \lim_{z\to 1} \left| \frac{0{,}8z(z-1)}{(z-0{,}8)^2} \right. = 0$$

Exercice 4

Trouver la séquence $y(n)$ qui a comme transformée en z : $Y(z) = \frac{1}{6-5z^{-1}+z^{-2}}$.



$$Y(z) = \frac{1}{6-5z^{-1}+z^{-2}} = \frac{z^2}{6z^2-5z+1} = \frac{z}{2z-1} - \frac{z}{3z-1} = \frac{1}{2}\frac{z}{z-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

$$y(n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] u(n)$$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,1667	0,1389	0,0880	0,0502	0,0271	0,0143	0,0074	0,0038	0,0019	0,0010	0,0005

Exercice 5

De quelle fonction $x(n)$ la fonction $X(z) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} z^2}{z^2 - 0.8\sqrt{2}\, z + 0{,}64}$ est la transformée en z ?

$$x(n) = 0{,}8^n \cos\left[\frac{\pi}{4}(n-1)\right] u(n)$$

Exercice 6

Quelles sont les transformées en z de :

1) $x_1(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$

2) $x_2(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$

3) $x_3(n) = n \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$.

1) $\dfrac{z}{z-\frac{1}{3}}=\dfrac{3z}{3z-1}$

2) $x_2(n)=4\left(\frac{1}{6}\right)^n u(n)$ a pour transformée $\dfrac{4z}{z-\frac{1}{6}}$

3) $\frac{1}{3}\dfrac{z}{\left(z-\frac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{3z}{(3z-1)^2}$

Exercice 7

1) Donner la transformée en z de la fonction discrète $x(n)=\left[1-sin\left(\frac{n\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)\right]u(n)$.

En déduire les transformées en z de :

2) $x_1(n)=\left[1+cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right]u(n-1)$

3) $y(n)=e^{-2n}\left[1-sin\left(\frac{n\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)\right]u(n)$.

4) $g(n)=n\left[1-sin\left(\frac{n\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)\right]u(n)$

---

1) $x(n)=\left[1-sin\left(\frac{n\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)\right]u(n)$ $\qquad X(z)=\dfrac{z}{z-1}-\dfrac{-z^2\,sin\frac{\pi}{3}+z\,sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)}{z^2-2cos\frac{\pi}{6}z+1}=\dfrac{z}{z-1}-\dfrac{z-\frac{\sqrt{3}}{2}z^2}{z^2-\sqrt{3}\,z+1}$

2) $x_1(n)=\left[1+cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right]u(n-1)=x(n-1)$ $\qquad X_1(z)=z^{-1}\,X(z)=\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}z}{z^2-\sqrt{3}\,z+1}$

3) $y(n)=e^{-2n}\left[1-sin\left(\frac{n\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)\right]u(n)=\left(e^{-2}\right)^n x(n)$ $\qquad Y(z)=\dfrac{z}{z-e^{-2}}-\dfrac{e^{-2}z-\frac{\sqrt{3}}{2}z^2}{z^2-\sqrt{3}\,e^{-2}z+e^{-4}}$

4) $g(n)=n\left[1-sin\left(\frac{n\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)\right]u(n)=n\,x(n)$ $\qquad G(z)=-z\dfrac{d\,X(z)}{dz}=\dfrac{z}{(z-1)^2}+z\dfrac{\frac{z^2}{2}-\sqrt{3}\,z+1}{\left(z^2-\sqrt{3}\,z+1\right)^2}$

<u>Formules développées :</u>

$$X(z)=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(1+3\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z^{-1}+2z^{-2}}{1-\left(1+\sqrt{3}\right)z^{-1}+\left(1+\sqrt{3}\right)z^{-2}+z^{-3}}$$

$$X_1(z) = \frac{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z^{-1} - \left(1+3\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z^{-2} + 2\, z^{-3}}{1-\left(1+\sqrt{3}\right)z^{-1}+\left(1+\sqrt{3}\right)z^{-2}+z^{-3}}$$

$$Y(z) = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(1+3\frac{\sqrt{3}}{2}\right) e^{-2} z^{-1} + 2e^{-4} z^{-2}}{1-\left(1+\sqrt{3}\right)e^{-2}z^{-1}+\left(1+\sqrt{3}\right)e^{-4}z^{-2}+e^{-6}z^{-3}}$$

$$G(z) = \frac{\frac{3}{2}z^{-1}-\left(1+3\sqrt{3}\right)z^{-2}+\left(\frac{13}{2}+2\sqrt{3}\right)z^{-3}-\left(2+3\sqrt{3}\right)z^{-4}+2z^{-5}}{1-2\left(1+\sqrt{3}\right)z^{-1}+2\left(3+2\sqrt{3}\right)z^{-2}-2\left(5+2\sqrt{3}\right)z^{-3}+2\left(3+2\sqrt{3}\right)z^{-4}-2\left(1+\sqrt{3}\right)z^{-5}+z^{-6}}$$

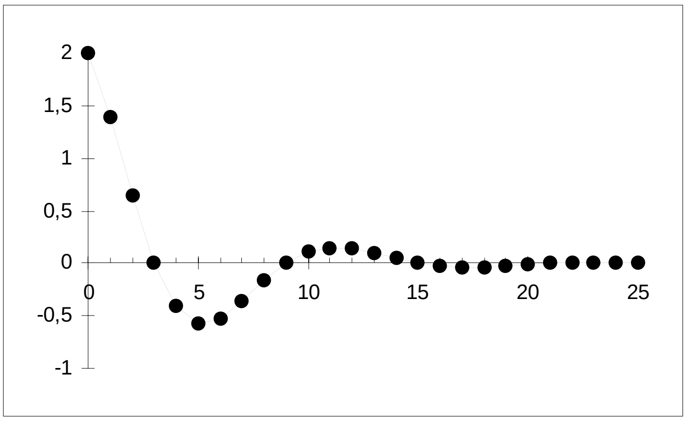
Exercice 8

On considère la transformée $X(z) = \dfrac{z}{z-z_0} + \dfrac{z}{z-z_0^*}$. Trouver $x(n)$. On posera $z_0 = e^{(r+j\theta)}$ et donc $z_0^* = e^{(r-j\theta)}$

On sait que $e^{an}u(n) \rightleftharpoons \dfrac{z}{z-e^a}$

$$x(n) = e^{rn}\left(e^{jn\theta} + e^{-jn\theta}\right)u(n) = 2\,e^{rn}\cos n\theta\, u(n)$$

On remarquera que $X(z) = \dfrac{z}{z-z_0} + \dfrac{z}{z-z_0^*} = \dfrac{z\left(z-e^r\cos\theta\right)}{z^2-2e^r\cos\theta\, z+e^{2r}}$ est de la forme $X(z)\dfrac{z(z-c)}{z^2-2c\,z+b}$



pour e^r=0,8 et θ=30°

Exercice 9

Trouver h(n) correspondant à la transformée en z suivante : $H(z)=\dfrac{z^{-2}-2z^{-1}+1}{a^2z^{-2}-2az^{-1}+1}$

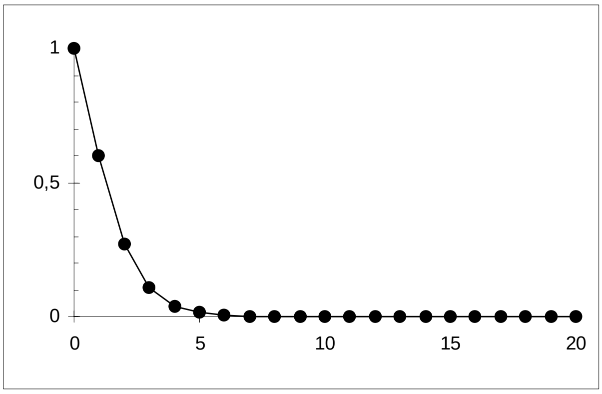
$$H(z)=\frac{z^{-2}-2z^{-1}+1}{a^2z^{-2}-2az^{-1}+1}=\frac{\left(z^{-1}-1\right)^2}{\left(az^{-1}-1\right)^2}=\frac{(z-1)^2}{(z-a)^2}$$

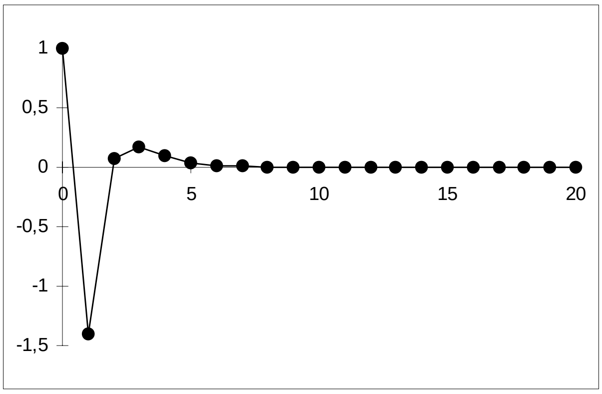
On sait que $n\,a^n x(n) \rightleftharpoons \dfrac{az}{(z-a)^2}$

$$H(z)=\frac{z^2-2z+1}{(z-a)^2}=\frac{1}{a}\left(z\frac{az}{(z-a)^2}-2\frac{az}{(z-a)^2}+z^{-1}\frac{az}{(z-a)^2}\right)$$

$$h(n)=\frac{1}{a}\left((n+1)a^{(n+1)}u(n+1)-2na^n u(n)+(n-1)a^{(n-1)}u(n-1)\right)$$

$$h(n)=(n+1)a^n u(n+1)-2na^{(n-1)}u(n)+(n-1)a^{(n-2)}u(n-1)$$





$(n+1)a^n u(n+1)$ pour a=0,3 $h(n)$

Exercice 10

Quelle est la fonction discrète $h(n)$ dont la transformée est $H(z)=\dfrac{z-z_0}{(z-p_0)(z-p_0^*)}$ où z_0 est un réel. On utilisera la méthode basée sur la reconnaissance de fonctions connues et la méthode des résidus. On posera $p_0=\rho e^{j\theta}$. Quelle équation de récurrence correspond à $H(z)$?

Méthode classique

$$H(z)=\frac{z-z_0}{z^2-2\rho\cos\theta\, z+\rho^2}=\frac{z-\rho\cos\theta}{z^2-2\rho\cos\theta\, z+\rho^2}+\frac{\rho\cos\theta-z_0}{z^2-2\rho\cos\theta\, z+\rho^2}$$

$$H(z) = z^{-1}\frac{z^2 - z\rho\cos\theta}{z^2 - 2\rho\cos\theta\, z + \rho^2} + z^{-1}\frac{z(\rho\cos\theta - z_0)}{z^2 - 2\rho\cos\theta\, z + \rho^2}$$

$$H(z) = z^{-1}\frac{z^2 - z\rho\cos\theta}{z^2 - 2\rho\cos\theta\, z + \rho^2} + kz^{-1}\frac{z\rho\sin\theta}{z^2 - 2\rho\cos\theta\, z + \rho^2}$$ en posant $k\rho\sin\theta = \rho\cos\theta - z_0$.

$$k = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{z_0}{\rho\sin\theta}$$

$$h(n) = \rho^{n-1}\cos[(n-1)\theta]u(n-1) + k\rho^{n-1}\sin[(n-1)\theta]u(n-1)$$

$$h(n) = \rho^{n-1}\left\{\cos[(n-1)\theta] + \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{z_0}{\rho\sin\theta}\right)\sin[(n-1)\theta]\right\}u(n-1)$$

$$h(n) = \frac{\rho^{n-1}}{\sin\theta}\left\{\sin\theta\cos[(n-1)\theta] + \cos\theta\sin[(n-1)\theta] - \frac{z_0}{\rho}\sin[(n-1)\theta]\right\}u(n-1)$$

$$h(n) = \frac{\rho^{n-1}}{\sin\theta}\left\{\sin(n\theta) - \frac{z_0}{\rho}\sin[(n-1)\theta]\right\}u(n-1)$$

$$h(n) = \frac{\rho^{n-1}}{\sin\theta}\left[\left(1 - \frac{z_0}{\rho}\cos\theta\right)\sin(n\theta) + \frac{z_0}{\rho}\sin\theta\cos(n\theta)\right]u(n-1)$$

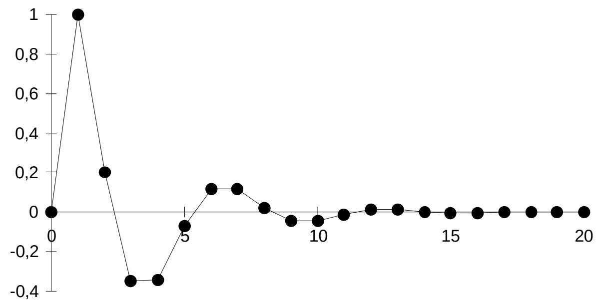
$$h(n) = A\frac{\rho^{n-1}}{\sin\theta}[\sin(n\theta + \varphi)]u(n-1)$$ en posant $A\cos\varphi = 1 - \frac{z_0}{\rho}\cos\theta$ et $A\sin\varphi = \frac{z_0}{\rho}\sin\theta$

soit $A = \sqrt{1 - 2\frac{z_0}{\rho}\cos\theta + \frac{z_0^2}{\rho^2}}$ et $tg\varphi = \frac{z_0\sin\theta}{\rho - z_0\cos\theta}$

Avec: $\rho =$ 0,7 $\theta = 60°$ $z_0 = 0,5$

on trouve k = -0,247 $\varphi = 43,9°$ A= 0,892

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$h(n)$	0	1	0,2	-0,35	-0,343	-0,069	0,120	0,118	0,024	-0,041	-0,040



Méthode des résidus

$$\boldsymbol{R}_{p_0} = \lim_{z\to p_0}\Big|(z - p_0)z^{n-1}H(z) = \lim_{z\to p_0}\Big|(z - p_0)z^{n-1}\frac{z - z_0}{(z - p_0)(z - p_0^*)} = p_0^{n-1}\frac{p_0 - z_0}{(p_0 - p_0^*)}$$

$$\boldsymbol{R}_{p_0} = \rho^{n-1}e^{j(n-1)\theta}\frac{\rho e^{j\theta} - z_0}{2j\rho\sin\theta}$$ et de même $$\boldsymbol{R}_{p_0^*} = -\rho^{n-1}e^{-j(n-1)\theta}\frac{\rho e^{-j\theta} - z_0}{2j\rho\sin\theta}$$

$$h(n) = \boldsymbol{R}_{p_0} + \boldsymbol{R}_{p_0^*} = \frac{\rho^{n-1}}{2j\rho\sin\theta}\left[e^{j(n-1)\theta}\left(\rho e^{j\theta} - z_0\right) - e^{-j(n-1)\theta}\left(\rho e^{-j\theta} - z_0\right)\right]$$

$$h(n) = \frac{\rho^{n-1}}{2j\rho\sin\theta}\left\{\rho 2j\sin(n\theta) - z_0 2j\sin[(n-1)\theta]\right\}$$ etc...

<u>Equation de récurrence</u>

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z - z_0}{z^2 - 2\rho\cos\theta z + \rho^2} = \frac{z^{-1} - z_0 z^{-2}}{1 - 2\rho\cos\theta z^{-1} + \rho^2 z^{-2}}$$

$$Y(z)\left(1 - 2\rho\cos\theta z^{-1} + \rho^2 z^{-2}\right) = X(z)\left(z^{-1} - z_0 z^{-2}\right)$$

$$y(n) = x(n-1) - z_0 x(n-2) + 2\rho\cos\theta\, y(n-1) - \rho^2 y(n-2)$$

On peut vérifier que la réponse impulsionnelle à cette équation donne les mêmes échantillons que ceux que l'on obtient avec $h(n)$.